

Решения и критерии оценки заданий конкурсной работы учителей математики

Задание 1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 3$. (2 балла)

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $\cos \alpha \neq 0$

$$\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = \frac{7 \operatorname{tg} \alpha + 13}{5 \operatorname{tg} \alpha - 17} = 3.$$

$$7 \operatorname{tg} \alpha + 13 = 15 \operatorname{tg} \alpha - 51 \Leftrightarrow 8 \operatorname{tg} \alpha = 64 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 8.$$

Ответ: 8

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 2 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 2. У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету? (2 балла)

Решение.

Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она – в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете – фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 2 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 3. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом. (2 балла)

Решение.

Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть любой из 8 оставшихся человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $2/8$

Ответ: 0,25.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 2 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 4. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. (2 балла)

Решение.

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности большего и меньшего оснований. Поэтому он равен $(3 - 2):2 = 0,5$.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 2 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

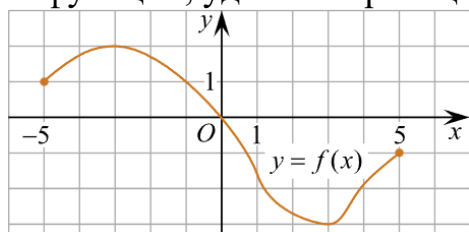
Задание 5. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 5]$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$. (2 балла)

Решение. Напомним, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Тем самым функция f , график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках $[-5; -3]$ и $[3; 5]$ и убывает на отрезке $[-3; 3]$.

Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке -5 , или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке $[3; 5]$ справедливо неравенство $f(5) > f(3)$. Поскольку по условию $f(-5)$ не меньше, чем $f(5)$, справедлива оценка $f(-5) > f(3)$.

Таким образом, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.

**Критерии оценивания:**

Приведено полное верное решение – 2 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 6. Решите уравнение: $\sin 3x + \cos 5x + \cos 2x = \pi$ (3 балла)

Решение. Т.к. $|\sin 3x| \leq 1$, $|\sin 5x| \leq 1$ и $|\cos 2x| \leq 1$, то левая часть уравнения не может принимать значений больших, чем 3, а правая часть ($\pi = 3,14 \dots$) больше 3. Поэтому данное уравнение не имеет корней.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 3 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 7. В кармане у Нади лежит 5 леденцов и 6 ирисок. Каждую минуту Надя наудачу вынимает сласти из кармана по одной и отправляет их в рот. Найдите вероятность того, что через четыре минуты у Нади в кармане окажется 1 леденец и 6 ирисок. Результат округлите до тысячных. (3 балла)

Решение. Пусть A, B, C, D – события, означающие, что через каждую минуту Надя извлекает из кармана леденец. Нам требуется определить вероятность произведения этих событий:

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC) =$$

$$= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{66} = 0,015.$$

Ответ. 0,015.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 3 балла;

Решение в целом верное, но содержит незначительную ошибку или недочёт – 1 балл;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 8. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение.

	<i>Весь сплав, кг</i>	<i>Медь, %</i>	<i>Медь, кг</i>
<i>1 сплав</i>	x	10 0,1	0,1x
<i>2 сплав</i>	$x+3$	40 0,4	0,4(x+3)

$$\frac{0,1x + 0,4(x + 3)}{40 + 10} \cdot 100 = 30$$

$$x=3$$

Ответ :9

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 3 балла;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 9. Решите уравнение: $2\sin x + 2\cos x + \sin 2x + 1 = 0$. (3 балла)

Решение.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2t + t^2 = 0 \\ t = \sin x + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \\ t = \sin x + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Ответ. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 3 балла;

Решение в целом верное, но содержит незначительную ошибку или недочёт – 2 балл;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 10. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми $A_1 D$ и $D_1 E$, где E – середина ребра CC_1 .

Решение.

Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке. Найдем координаты точки $E(1; 1; \frac{1}{2})$ и координаты направляющих векторов прямых $A_1 D$ и $D_1 E$: $\overrightarrow{A_1 D} = \{0; 1; -1\}$, $\overrightarrow{D_1 E} = \{1; 0; -\frac{1}{2}\}$.

Косинус угла φ между прямыми $A_1 D$ и $D_1 E$ определяется по формуле (1):

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-\frac{1}{2})|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \varphi = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$

Критерии оценивания:

Приведено полное верное решение – 3 балла;

Решение в целом верное, но содержит незначительную ошибку или недочёт – 2 балл;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 11. Докажите, что любая натуральная степень многочлена $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.

Решение: Пусть n – натуральное число. Многочлен $P^n(x) = x^{4n} + \dots + 2^n$. Найдем сумму коэффициентов многочлена $P^n(x)$. Для этого найдём значение многочлена $P^n(x)$ при $x = 1$. $P^n(1) = (P(1))^n = (1 + 1 - 3 + 1 + 2)^n = 2^n$. Значение 2^n получается из суммы всех коэффициентов и свободного члена многочлена $P^n(x)$, т. к. свободный член равен 2^n , то сумма остальных коэффициентов равно нулю, значит среди них есть хотя бы один отрицательный. (Возможны и другие решения)

Критерии оценивания:

Приведено полное обоснованное доказательство – 7 баллов;

Доказательство в целом верное, но содержит незначительную ошибку или недочёт – 4-6 баллов;

Задача решена неверно – 0 баллов.

Задание 12. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины C , выбрана точка X . Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров из точки X на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности.

Решение. Пусть H – основание высоты, проведённой из вершины C . Обозначим $\angle ABC$ через β , тогда угол $BCH = 90^\circ - \beta$. Четырёхугольник CA_1XB_1 вписанный, т.к. сумма противоположных углов равна 180° . $\angle XCB_1 = \angle XA_1B_1$ как вписанные углы окружности, описанной около четырёхугольника CA_1XB_1 . Так как $\angle CA_1X$ прямой, то получаем, что $\angle CA_1B_1 = \beta$. Для четырёхугольника выполняется следующее условие: $\angle ABC = \angle CA_1B_1$, то есть внутренний угол равен противоположному внешнему углу, следовательно четырёхугольник вписанный, точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной окружности.

Критерии оценивания:

Приведено полное верное доказательство – 7 баллов;

Доказательство в целом верное, но содержит незначительную ошибку или недочёт – 4-6 баллов;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 13. Решите неравенство: $\log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leq 2$.

Решение: Преобразуем неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\log_5 25 \cdot \log_5^2(25x)}{\log_5 625x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2 + \log_5 x)^2}{4 + \log_5 x} \leq 2.$$

Положим $t = \log_5 x$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{(2+t)^2}{4+t} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{4+4t+t^2-4-t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)t}{4+t} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t < -4 \\ -3 \leq t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной, находим: $\begin{cases} \log_5 x < -4, \\ -3 \leq \log_5 x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{625}, \\ \frac{1}{125} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{625}\right) \cup \left[\frac{1}{125}; 1\right]$.

Критерии оценивания:

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов;

Обосновано получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения – 5 баллов;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 14. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается гипотенузы AB в точке C_1 , а катетов CA и CB – в точках B_1 и A_1 соответственно. Внеписанная окружность касается стороны BC в точке A_2 . Докажите, что отрезки A_2B_1 и A_1C_1 перпендикулярны.

Доказательство: Биссектриса, проведённая из угла B перпендикулярна отрезку A_1C_1 так как точки A_1 и C_1 равноудалены от вершины B. Докажем, что B_1A_2 и B_1I параллельны, где I центр окружности вписанной в треугольник ABC. Рассмотрим четырёхугольник IB_1A_2V , докажем, что это параллелограмм. IB_1 и BC перпендикулярны стороне AC следовательно B_1I параллельна BA_2 . Кроме того A_2V отрезок касательной внеписанной окружности, он равен отрезку касательной CA_1 вписанной окружности, т.к. точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины BC. А отрезок A_1C в прямоугольном треугольнике равен отрезку IB_1 , тогда получаем, что отрезки B_1I и A_2V равны. Получаем, что противоположные стороны четырёхугольника IB_1A_2V равны и параллельны следовательно это параллелограмм и B_1I параллельна A_2B_1 . Так как B_1I перпендикулярен A_1C_1 , то и B_1A_2 перпендикулярен A_1C_1 . Что и требовалось доказать.

Критерии: Приведено полное обоснованное доказательство – 7 баллов;

Доказательство содержит незначительную ошибку или недочёт – 4-6 баллов;

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 15. Сравните числа $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ и $2\sqrt{2006}$.

Решение 1. Для двух любых неравных чисел a и b имеет место неравенство

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (теорема о среднем квадратичном и среднем арифметическом).}$$

Применяя теорему для чисел $\sqrt{2005}$ и $\sqrt{2007}$, получаем: $\frac{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}}{2} < \sqrt{\frac{2005 + 2007}{2}}$, откуда $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Решение 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Так как $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0$, функция убывает на $[0; +\infty)$.

Следовательно, $f(2005) > f(2006)$, откуда $\sqrt{2006} - \sqrt{2005} > \sqrt{2007} - \sqrt{2006}$ и получаем, что $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Решение 3. Для любого натурального числа n имеем:

$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 4n \Leftrightarrow \sqrt{n^2-1} < \sqrt{n}$. Последнее неравенство верно, следовательно, верно и неравенство $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}$, откуда при $n = 2006$ получаем $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Решение 4. $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006} \Leftrightarrow \sqrt{2007} - \sqrt{2006} < \sqrt{2006} - \sqrt{2005} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2006}} < \frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}} \Leftrightarrow \sqrt{2007} > \sqrt{2005}$. Последнее неравенство верно, следовательно, верно и неравенство $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Решение 5. Функция $y = \sqrt{x}$ выпукла вверх, следовательно, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Подставив в это неравенство $x_1 = 2005$, $x_2 = 2007$, получаем $\frac{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}{2} < \sqrt{2006}$, откуда $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Решение 6. Рассмотрим векторы $\vec{a}\{\sqrt{2005}; \sqrt{2007}\}$ и $\vec{b}\{1; 1\}$. Векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, следовательно, $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, откуда $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

Критерии. За каждое верно приведённое решение по 3 балла.